第26卷 第6期　工 程 数 学 学 报　Vol. 26 No. 6
2009年12月　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-0951-11

2DPCA 在图像特征提取中优于 PCA 的判定条件*

程正东[1,2]， 章毓晋[1]， 樊 祥[2,3]

(1- 清华大学电子工程系，北京 100084； 2- 合肥电子工程学院，合肥 230037；
3- 中国科技大学六系，合肥 230027)

摘 要: 主元分析 (PCA) 与二维主元分析 (2DPCA) 是两种典型的图像特征提取方法，它们所提取的图像特征的优劣可由重建误差来衡量。通过对 PCA 和 2DPCA 的重建误差分析发现，二者的重建误差在理论上相同，但在实际应用中取决于它们的样本协方差阵的估计准确度。本文以均方误差为度量给出了 PCA 与 2DPCA 样本协方差阵的估计准确度表达式，并由此得到 2DPCA 图像特征优于 PCA 的判定条件是 2DPCA 协方差阵的特征值平方和大于 PCA。本文还指出行 2DPCA 与列 2DPCA 所提取的图像特征孰优孰劣也取决于它们各自协方差阵的特征值平方和的大小。在人脸图像库与人脸表情图像库上的实验验证了上述判定条件的正确性。

关键词: PCA；2DPCA；图像特征；协方差阵；重建误差；均方误差

分类号: **AMS**(2000) 62E20　　**中图分类号**: O212.7　　**文献标识码**: A

1 引言

主元分析 (Principal Component Analysis, PCA) 与二维主元分析 (2-Dimension PCA, 2DPCA) 是两种典型的图像特征提取方法。PCA 最早于 1901 年被提出[1]，后于 20 世纪 90 年代前后引入到人脸图像的表示与识别中[2-3]；2DPCA 最早于 2004 年提出并用于人脸图像表示与识别[4]。以下将由 PCA 从图像中提取的特征称为 PCA 图像特征，由 2DPCA 从图像中提取的特征称为 2DPCA 图像特征。

PCA 与 2DPCA 的原理本质上一致，区别在于 PCA 需要先将图像拉直成向量再处理，而 2DPCA 不需要这个过程直接对二维图像进行处理。在进行图像特征提取时，PCA 与 2DPCA 都需要处理一个协方差阵来获取投影矩阵。上述的区别导致它们要处理的协方差阵有很大不同。对于一个 $m\times n$ 的图像，PCA 要处理的是一个 mn 阶协方差阵，称之为 PCA 协方差阵；而 2DPCA 要处理的是一个 m (或 n) 阶图像协方差阵[4]，称之为 2DPCA 协方差阵。在实际问题中，PCA 与 2DPCA 的协方差阵都由它们相应的样本协方差阵来估计。

2DPCA 协方差阵实际上是由 PCA 协方差阵的部分元素构成的，因而它含有的信息量不如 PCA 协方差阵多。但是实验表明[4]，2DPCA 图像特征在图像表示与图像识别两方面都优于 PCA 图像特征。本文试图对此给出合理解释。首先对 PCA 与 2DPCA 图像特征的重建误差进行了分析，结果表明它们的重建误差在理论上是相同的，但在实际中取决于各自样本协方差阵的估计准确度。本文以均方误差为度量对 PCA 与 2DPCA 样本协方差阵的估计准确度进行了分析，得到了 2DPCA 样本协方差阵的估计准确度优于 PCA 的一个判定条件。由类似方法还可得到 C2DPCA (Column 2DPCA) 与 R2DPCA (Row 2DPCA) 孰优孰劣的判定条件。

收稿日期: 2008-03-10. **作者简介**: 程正东 (1972年11月生)，男，博士. 研究方向：信号、信息处理与图像处理.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (60872084)；高等学校博士学科点专项科研基金 (SRFDP-20060003102).

2 PCA 与 2DPCA 图像特征及其重建误差

PCA 与 2DPCA 图像特征主要用于图像表示与图像识别，图像表示的效果常用重建误差来描述，而图像识别率也与重建误差有密切关系。因此，先对 PCA 与 2DPCA 图像特征的重建误差进行分析。

设 N 个 $m \times n$ 图像矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 是来自于总体 A 的独立同分布随机图像样本，它们的列拉直向量为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 和 a。

2.1 PCA 协方差阵与图像特征

随机图像矩阵 (即总体) A 或随机图像向量 a 的协方差阵定义为[5]，

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{mn\times mn} = E\big[(a - E(a))(a - E(a))^T\big], \tag{1}$$

它是PCA 协方差阵，包含了图像 A 的所有像素之间的相关信息。现对 Σ 作特征值分解，特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{mn} \geq 0$，相应的单位正交特征向量为 $p_1, p_2, \cdots, p_{mn}$。取前 k $(1 \leq k \leq mn)$ 个特征向量组成矩阵 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_k)$，并令 $b = P^T(a - E(a))$，由于 $E(bb^T) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$，包含了 a 的协方差阵的前 k 个最大特征值，故称 b 为随机向量 a 的 k 阶主元分量[6]。b 就是PCA 图像特征。

在实际问题中，Σ 由其样本协方差阵

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \bar{a})(a_i - \bar{a})^T,$$

进行估计，其中 $\bar{a} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} a_i$。对 $\hat{\Sigma}$ 作特征值分解，记前 k 个最大特征值所对应的单位正交特征向量矩阵为 $\hat{P} = (\hat{p_1}, \hat{p_2}, \cdots, \hat{p_k})$。

2.2 2DPCA 协方差阵与图像特征

2DPCA 有两种形式：一种称为列 2DPCA (Column 2DPCA, C2DPCA)，另一种称为行 2D-PCA (Row 2DPCA, R2DPCA)。

C2DPCA 协方差阵定义为[4]，

$$\Gamma_c = E\big[(A - E(A))(A - E(A))^T\big] = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{cov}(a_i), \tag{2}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 A 的列向量。Γ_c 是 A 的各个列向量的协方差阵的和；

R2DPCA 协方差阵定义为[4]，

$$\Gamma_r = E\big[(A - E(A))^T(A - E(A))\big] = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{cov}(\beta_i), \tag{3}$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 A 的行向量。Γ_r 是 A 的各个行向量的协方差阵的和。

C2DPCA 协方差阵与 R2DPCA 协方差阵统称为 2DPCA 协方差阵。不难看出，C2DPCA 协方差阵 Γ_c 只保留了 A 的同列像素之间的相关信息，丢弃了不同列像素之间的相关信息；R2DPCA 协方差阵 Γ_r 只保留了 A 的同行像素之间的相关信息，丢弃了不同行像素之间的相关信息，因此 Γ_c 与 Γ_r 都是由 Σ 的部分元素构成的。以下仅对 C2DPCA 进行讨论，所得结果皆适用于 R2DPCA。

对 C2DPCA 协方差阵 Γ_c 作特征值分解，特征值为 $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_m \geq 0$，相应的单位正交特征向量为 $q_1, q_2, \cdots, q_m$。取前 l $(1 \leq l \leq m)$ 个特征向量组成矩阵 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_l)$，则图像矩阵 A 的 l 阶主元分量为 $B = Q^T(A - E(A))$，它就是 C2DPCA 图像特征。

在实际问题中，Γ_c 由其样本协方差阵

$$\hat{\Gamma}_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(A_i - \bar{A})(A_i - \bar{A})^T,$$

进行估计，$\bar{A} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} A_i$。对 $\hat{\Gamma}_c$ 作特征值分解，记其前 l 个最大特征值所对应的单位正交特征向量矩阵为 $\hat{Q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots, \hat{q}_l)$。

2.3 图像特征的重建误差

先给出三个引理：

引理 1[7] 设 x 为 n 维随机向量，$E(x) = \mu$，$\mathrm{cov}(x) = \Sigma$，H 为 n 阶非负定阵，则

$$E(x^T H x) = \mathrm{tr}(H\Sigma) + \mu^T H \mu, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

引理 2[7] 设 $B_{m\times k}$，$C_{k\times l}$，$D_{l\times n}$ 为三个矩阵，则

$$\mathrm{Vec}(BCD) = (D^T \otimes B)\cdot \mathrm{Vec}(C), \tag{5}$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积，$\mathrm{Vec}(\cdot)$ 表示矩阵的列拉直运算。

引理 3[7] 设 D 为 n 阶对称阵，U 为其前 k 个最大特征值所对应的单位正交特征向量矩阵，则对于任意 $n \times k$ 列正交矩阵 V，有

$$\mathrm{tr}(U^T D U) = \max_{V} \mathrm{tr}(V^T D V). \tag{6}$$

设由 PCA 图像特征 b 对随机图像向量 a 进行重建的表达式为 $\tilde{a} = E(a) + Pb$，由 C2DPCA 图像特征 B 对随机图像矩阵 A 进行重建的表达式为 $\tilde{A} = E(A) + QB$，则有

定理 1 当

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = \sum_{i=1}^{l}\tau_i,$$

时，$E\{\|A - \tilde{A}\|^2\} = E\{\|a - \tilde{a}\|^2\}$。

证明 由引理 1，PCA 图像特征 b 的重建误差为

$$\begin{aligned} E\{\|a - \tilde{a}\|^2\} &= E\big[(a - E(a))^T(I - PP^T)(a - E(a))\big] = \mathrm{tr}\big[(I - PP^T)\mathrm{cov}(a)\big] \\ &= \mathrm{tr}(\Sigma) - \mathrm{tr}(P^T\Sigma P) = \mathrm{tr}(\Sigma)\Big(1 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big/\sum_{i=1}^{mn}\lambda_i\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

由引理 1 和引理 2，C2DPCA 图像特征 B 的重建误差为

$$\begin{aligned} E\{\|A - \tilde{A}\|^2\} &= E\big\{[\mathrm{Vec}(I_m - QQ^T)(A - E(A))]^T[\mathrm{Vec}(I_m - QQ^T)(A - E(A))]\big\} \\ &= E\big\{(a - E(a))^T[I_n \otimes (I_m - QQ^T)](a - E(a))\big\} \\ &= \mathrm{tr}[I_n \otimes (I_m - QQ^T)\mathrm{cov}(a)] = \mathrm{tr}(\Sigma) - \mathrm{tr}((I_n \otimes Q)^T\Sigma(I_n \otimes Q)) \\ &= \mathrm{tr}(\Sigma) - \mathrm{tr}(Q^T\Gamma_c Q) = \mathrm{tr}(\Sigma)\Big(1 - \sum_{i=1}^{l}\tau_i\Big/\sum_{i=1}^{m}\tau_i\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

由于 $\mathrm{tr}(\Gamma_c)=\mathrm{tr}(\Sigma)$，即 $\sum\limits_{i=1}^{mn}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{m}\tau_i$，所以结论成立。

称

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big/\sum_{i=1}^{mn}\lambda_i \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{l}\tau_i\Big/\sum_{i=1}^{m}\tau_i,$$

为投影特征值比例。定理1说明，在理论上，只要投影特征值比例相同，PCA图像特征与C2DPCA图像特征就具有相同的重建误差，因而它们的图像表示效果与图像识别率也大体相同。

但在实际问题中，重建表达式(7)与(8)中的 P，Q 分别由 $\hat{P}$, $\hat{Q}$ 替代，由类似于式(7)与式(8)的推导过程，可得实际问题中的重建误差为

$$E\{\|a-\tilde{a}\|^2|\hat{P}\}=\mathrm{tr}(\Sigma)-\mathrm{tr}(\hat{P}^T\Sigma\hat{P}), \tag{9}$$

$$E\{\|A-\tilde{A}\|^2|\hat{Q}\}=\mathrm{tr}(\Sigma)-\mathrm{tr}(\hat{Q}^T\Gamma_c\hat{Q}). \tag{10}$$

由式(9)与式(10)及引理3可见，在实际问题中PCA与C2DPCA图像特征的重建误差取决于PCA样本协方差阵 $\hat{\Sigma}$ 估计 Σ 的准确度和C2DPCA样本协方差阵 $\hat{\Gamma_c}$ 估计 Γ_c 的准确度。

3 样本协方差阵的准确度分析

采用样本估计的均方误差作为描述PCA样本协方差阵 $\hat{\Sigma}$ 估计 Σ 和C2DPCA样本协方差阵 $\hat{\Gamma}_c$ 估计 Γ_c 的准确度度量。

3.1 样本协方差阵的均方误差

为叙述的方便，记随机图像矩阵 A 的第 (i,l) 元为 α_i^l，$E(\alpha_i^l)=\mu_i^l$，(i,l) 元与 (j,k) 元的协方差为 $\sigma_{ij}^{kl}=E[(\alpha_i^l-\mu_i^l)(\alpha_j^k-\mu_j^k)]$，$(i_1, l_1)$ 元、(i_2, l_2) 元、(i_3, l_3) 元和 (i_4, l_4) 元的混合四阶中心矩为

$$V_{i_1i_2i_3i_4}^{l_1l_2l_3l_4}=E\big[(\alpha_{i_1}^{l_1}-\mu_{i_1}^{l_1})(\alpha_{i_2}^{l_2}-\mu_{i_2}^{l_2})(\alpha_{i_3}^{l_3}-\mu_{i_3}^{l_3})(\alpha_{i_4}^{l_4}-\mu_{i_4}^{l_4})\big].$$

不难看出，协方差 σ_{ij}^{lk} 是协方差阵 Σ 的 $(i+m(l-1), j+m(k-1))$ 元。

定理2 PCA样本协方差阵 $\hat{\Sigma}$ 的均方误差为

$$\begin{aligned}E\|\hat{\Sigma}-\Sigma\|_F^2 = {} & \frac{(N-1)^2}{N^3}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}V_{ijij}^{lklk}\\ & +\frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk}\\ & +\frac{(-N^5+4N^4-11N^2+15N-6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{ij}^{lk})^2\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的Frobenius范数。

证明 记样本 A_s 的第 (i,j) 元为 α_{is}^l，$b_{is}^l=\alpha_{is}^l-\bar{\alpha}_i{}^l$，其中

$$\bar{\alpha}_i^l=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\alpha_{is}^l, \quad s=1,2,\cdots,N,$$

则协方差 σ_{ij}^{lk} 的估计为

$$\hat{\sigma}_{ij}^{lk} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} b_{is}^{l} b_{js}^{k},$$

由于

$$E(b_{is}^{l} b_{js}^{k}) = \frac{N-1}{N}\sigma_{ij}^{lk},$$

有

$$\begin{aligned}
E(b_{is}^{l} b_{js}^{k})^2 &= E\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{is}^{l}-\mu_i^{l}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big)^2\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{js}^{k}-\mu_j^{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big)^2 \\
&= \frac{(N-1)^4}{N^4}E[(\alpha_{is}^{l}-\mu_i^{l})^2(\alpha_{js}^{k}-\mu_j^{k})^2] + \frac{1}{N^4}E\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big)^2\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\ s_2\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big)^2 \\
&\quad + \frac{(N-1)^2}{N^4}E(\alpha_{is}^{l}-\mu_i^{l})^2\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\ s_2\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big)^2 + \frac{(N-1)^2}{N^4}E(\alpha_{js}^{k}-\mu_j^{k})^2\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big)^2 \\
&\quad + \frac{4(N-1)^2}{N^4}E(\alpha_{is}^{l}-\mu_i^{l})(\alpha_{js}^{k}-\mu_j^{k})\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\ s_2\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big) \\
&= \frac{(N-1)^4}{N^4}V_{ijij}^{lklk} + \frac{2(N-1)^3}{N^4}\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk} + \frac{4(N-1)^3}{N^4}(\sigma_{ij}^{lk})^2 \\
&\quad + \frac{1}{N^4}E\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}\sum_{\substack{t_1=1\\ t_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})(\alpha_{it_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\ s_2\neq s}}^{N}\sum_{\substack{t_2=1\\ t_2\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})(\alpha_{jt_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big) \\
&= \frac{N^3-4N^2+6N-3}{N^3}V_{ijij}^{lklk} + \frac{(N-1)(2N-3)}{N^3}\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk} + \frac{2(N-1)(2N-3)}{N^3}(\sigma_{ij}^{lk})^2, \qquad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\Big(\sum_{s=1}^{N}\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{N} b_{is}^{l} b_{js}^{k} b_{it}^{l} b_{jt}^{k}\Big) &= E\Big\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{N}\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{is}^{l}-\mu_i^{l}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_1=1\\ s_1\neq s}}^{N}(\alpha_{is_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big) \\
&\quad \times\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{js}^{k}-\mu_j^{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_2=1\\ s_2\neq s}}^{N}(\alpha_{js_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big) \\
&\quad \Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{it}^{l}-\mu_i^{l}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{t_1=1\\ t_1\neq t}}^{N}(\alpha_{it_1}^{l}-\mu_i^{l})\Big) \\
&\quad \times\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{jt}^{k}-\mu_j^{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{t_2=1\\ t_2\neq t}}^{N}(\alpha_{jt_2}^{k}-\mu_j^{k})\Big)\Big\} \\
&= \frac{(N-1)(2N-3)}{N^2}V_{ijij}^{lklk} + \frac{(N-1)(-N^3+5N^2-8N+6)}{N^4}\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk} \\
&\quad + \frac{(N-1)(N^5-2N^4-2N^3+8N^2-9N+6)}{N^4}(\sigma_{ij}^{lk})^2. \qquad (13)
\end{aligned}$$

因此

$$E\|\hat{\Sigma}-\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E(\hat{\sigma}_{ij}^{lk}-\sigma_{ij}^{lk})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(E(\hat{\sigma}_{ij}^{lk})^2-2E(\hat{\sigma}_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk})+(\sigma_{ij}^{lk})^2\Big)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\Big(\sum_{s=1}^{N}(b_{is}^{l}b_{js}^{k})^2+\sum_{s=1}^{N}\sum_{\substack{t=1\\t\neq s}}^{N}b_{is}^{l}b_{js}^{k}b_{it}^{l}b_{jt}^{k}\Big)$$

$$+\frac{-N+2}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{ij}^{lk})^2,$$

将式(12)和(13)代入上式再整理即证。

定理3 (i) C2DPCA样本协方差阵$\hat{\Gamma}_c$的均方误差为

$$E\|\hat{\Gamma}_c-\Gamma_c\|_F^2 = \frac{(N-1)^2}{N^3}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}V_{ijij}^{llkk}$$

$$+\frac{-N^4+3N^3-N^2-N+1}{N^5}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk}$$

$$+\frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}+\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl}); \quad (14)$$

(ii) R2DPCA样本协方差阵$\hat{\Gamma}_c$的均方误差为

$$E\|\hat{\Gamma}_r-\Gamma_r\|_F^2 = \frac{(N-1)^2}{N^3}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}V_{ijij}^{llkk}$$

$$+\frac{-N^4+3N^3-N^2-N+1}{N^5}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}$$

$$+\frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk}+\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl}). \quad (15)$$

证明 (i) Γ_c的(i,j)元

$$\gamma_{ij}=\sum_{l=1}^{n}\sigma_{ij}^{ll},$$

它的估计为

$$\hat{\gamma}_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}b_{is}^{l}b_{js}^{l},$$

由于

$$
\begin{aligned}
E(b_{is}^l b_{js}^l b_{is}^k b_{js}^k) = & \frac{(N-1)^4}{N^4} E[(\alpha_{is}^l - \mu_i^l)(\alpha_{js}^l - \mu_j^l)(\alpha_{is}^k - \mu_i^k)(\alpha_{js}^k - \mu_j^k)] \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{is}^l - \mu_i^l)(\alpha_{js}^l - \mu_j^l)\Big(\sum_{\substack{t_1=1\\t_1\neq s}}^N (\alpha_{it_1}^k - \mu_i^k)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_2=1\\t_2\neq s}}^N (\alpha_{jt_2}^k - \mu_j^k)\Big) \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{is}^l - \mu_i^l)(\alpha_{is}^k - \mu_i^k)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\s_2\neq s}}^N (\alpha_{js_2}^l - \mu_j^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_2=1\\t_2\neq s}}^N (\alpha_{jt_2}^k - \mu_j^k)\Big) \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{is}^l - \mu_i^l)(\alpha_{js}^k - \mu_j^k)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\s_2\neq s}}^N (\alpha_{js_2}^l - \mu_j^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_1=1\\t_1\neq s}}^N (\alpha_{it_1}^k - \mu_i^k)\Big) \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{js}^l - \mu_j^l)(\alpha_{is}^k - \mu_i^k)\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\s_1\neq s}}^N (\alpha_{is_1}^l - \mu_i^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_2=1\\t_2\neq s}}^N (\alpha_{it_1}^k - \mu_i^k)\Big) \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{js}^l - \mu_j^l)(\alpha_{js}^k - \mu_j^k)\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\s_1\neq s}}^N (\alpha_{is_1}^l - \mu_i^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_1=1\\t_1\neq s}}^N (\alpha_{it_2}^k - \mu_i^k)\Big) \\
& + \frac{(N-1)^2}{N^4} E(\alpha_{is}^k - \mu_i^k)(\alpha_{js}^k - \mu_j^k)\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\s_1\neq s}}^N (\alpha_{is_1}^l - \mu_i^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\s_2\neq s}}^N (\alpha_{js_2}^l - \mu_j^l)\Big) \\
& + \frac{1}{N^4} E\Big(\sum_{\substack{s_1=1\\s_1\neq s}}^N (\alpha_{is_1}^l - \mu_i^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{s_2=1\\s_2\neq s}}^N (\alpha_{js_2}^l - \mu_j^l)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_1=1\\t_1\neq s}}^N (\alpha_{it_1}^k - \mu_i^k)\Big)\Big(\sum_{\substack{t_2=1\\t_2\neq s}}^N (\alpha_{jt_2}^k - \mu_j^k)\Big) \\
= & \frac{(N-1)(N^2-3N+3)}{N^3} V_{ijij}^{llkk} + \frac{(N-1)(2N-3)}{N^3} (\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk} + \sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl} + \sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}), \quad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\Big(\sum_{s=1}^N \sum_{\substack{t=1\\t\neq s}}^N b_{is}^l b_{js}^l b_{it}^k b_{jt}^k\Big) = & E\Big\{\sum_{s=1}^N \sum_{\substack{t=1\\t\neq s}}^N \Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{is}^l - \mu_i^l) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_1=1\\s_1\neq s}}^N (\alpha_{is_1}^l - \mu_i^l)\Big) \\
& \times\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{js}^l - \mu_j^l) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{s_2=1\\s_2\neq s}}^N (\alpha_{js_2}^l - \mu_j^l)\Big) \\
& \Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{it}^k - \mu_i^k) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{t_1=1\\t_1\neq t}}^N (\alpha_{it_1}^k - \mu_i^k)\Big) \\
& \times\Big(\frac{N-1}{N}(\alpha_{jt}^k - \mu_j^k) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{t_2=1\\t_2\neq t}}^N (\alpha_{jt_2}^k - \mu_j^k)\Big)\Big\} \\
= & \frac{(N-1)(2N-3)}{N^2} V_{ijij}^{llkk} + \frac{(N-1)^2(N^3-N^2-2N+1)}{N^3}\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk} \\
& + \frac{(N-1)(-N^3+5N^2-8N+6)}{N^4}(\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk} + \sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl}), \quad (17)
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}E\|\hat{\Gamma}_c-\Gamma_c\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}E(\hat{\gamma}_{ij}-\gamma_{ij})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}E(\hat{\gamma}_{ij})^2+\frac{-N+2}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\gamma_{ij})^2\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\Big(\sum_{s=1}^{N}b_{is}^{l}b_{js}^{l}b_{is}^{k}b_{js}^{k}+\sum_{s=1}^{N}\sum_{\substack{t=1\\t\neq s}}^{N}b_{is}^{l}b_{js}^{l}b_{it}^{k}b_{jt}^{k}\Big)\\ &\quad+\frac{-N+2}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk},\end{aligned}$$

将式(16)和(17)代入上式再整理即证。

(ii)的证明与(i)类似。

3.2 样本协方差阵的估计准确度分析

下面比较PCA与C2DPCA样本协方差阵的估计准确度。考虑$\hat{\Sigma}$与$\hat{\Gamma}_c$的均方误差的差

$$\begin{aligned}\Delta(\hat{\Sigma}-\hat{\Gamma}_c) &= E\|\hat{\Sigma}-\Sigma\|_F^2-E\|\hat{\Gamma}_c-\Gamma_c\|_F^2=\frac{(N-1)^2}{N^3}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(V_{ijij}^{lklk}-V_{ijij}^{llkk}\right)\\ &\quad+\frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk}+\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk}-\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}-\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl}\right)\\ &\quad+\frac{N^4-3N^3+N^2+N-1}{N^5}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk}-\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

看一个例子。设2阶随机矩阵

$$A=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},$$

满足

$$x_{11}=\frac{1}{2}x_{12}=\frac{1}{3}x_{21}=\frac{1}{4}x_{22},\quad E(x_{11})=0,\quad E(x_{11}^2)=1,\quad E(x_{11}^4)=\eta>0.$$

经计算可得

$$\Delta(\hat{\Sigma},\hat{\Gamma}_c)=\frac{(N-1)^2}{N^3}(8\eta-8)+\frac{40N^4+32N^3-328N^2+456N-192}{N^6}, \tag{19}$$

若取$\eta=0.5$，则当$N>12$时，式(19)小于零。这个例子说明，C2DPCA样本协方差阵的估计准确度未必一定优于PCA样本协方差阵的估计准确度。换句话说，2DPCA样本协方差阵的估计准确度要优于PCA是需要条件的。

定理4(判定条件I) 1) 若

$$\sum_{i=1}^{mn}\lambda_i^2\le\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2,$$

则$E\|\hat{\Gamma}_c-\Gamma_c\|_F^2\le E\|\hat{\Sigma}-\Sigma\|_F^2$；

2) 若

$$\sum_{i=1}^{mn}\lambda_i^2\le\sum_{i=1}^{m}t_i^2,$$

则 $E\|\hat{\Gamma}_r - \Gamma_r\|_F^2 \le E\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_F^2$，其中 $t_1 \ge t_2 \ge \cdots \ge t_n$ 是 Γ_r 的特征值。

证明 将式 (18) 中的 l, k 互换，再与式 (18) 相加，得

$$
\begin{aligned}
2\Delta(\hat{\Sigma}, \hat{\Gamma}_c) = {} & \frac{(N-1)^2}{N^3}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(V_{ijij}^{lklk} + V_{ijij}^{klkl} - 2V_{ijij}^{llkk}\right) \\
& + \frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk} + \sigma_{ij}^{kl}\sigma_{ij}^{kl} - 2\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl}\right) \\
& + \frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk} + \sigma_{ii}^{kk}\sigma_{jj}^{ll} - 2\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}\right) \\
& + \frac{N^4-3N^3+N^2+N-1}{N^5}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk} - \sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk} - \sigma_{ij}^{kl}\sigma_{ij}^{kl}\right). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

记 $x_{il} = \alpha_i^l - \mu_i^l$，它是归零化随机图像矩阵 $A - E(A)$ 的 (i,l) 元，则

$$
\begin{aligned}
V_{ijij}^{lklk} + V_{ijij}^{klkl} - 2V_{ijij}^{llkk} &= E(x_{il}^2x_{jk}^2) + E(x_{ik}^2x_{jl}^2) - 2E(x_{il}x_{jl}x_{ik}x_{jk}) \\
&= E(x_{il}x_{jk} - x_{jl}x_{ik})^2 \ge 0, \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk} + \sigma_{ij}^{kl}\sigma_{ij}^{kl} - 2\sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{kl} &= (E(x_{il}x_{jk}))^2 + (E(x_{ik}x_{jl}))^2 - 2E(x_{il}x_{jk})E(x_{ik}x_{jl}) \\
&= (E(x_{il}x_{jk}) - E(x_{ik}x_{jl}))^2 \ge 0, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ii}^{ll}\sigma_{jj}^{kk} + \sigma_{ii}^{kk}\sigma_{jj}^{ll} - 2\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk} &= E(x_{il}^2)E(x_{jk}^2) + E(x_{ik}^2)E(x_{jl}^2) - 2E(x_{il}x_{ik})E(x_{jl}x_{jk}) \\
&\ge 2\sqrt{E^2(x_{il}x_{ik})E^2(x_{jl}x_{jk})} - 2E(x_{il}x_{ik})E(x_{jl}x_{jk}) = 0, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

即式 (20) 的前 3 项非负，最后一项的求和部分为

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk} - \sigma_{ij}^{lk}\sigma_{ij}^{lk} - \sigma_{ij}^{kl}\sigma_{ij}^{kl}\right) \\
= {} & 2\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{mn}\sum_{j=1}^{mn}(\sigma_{ij}^{lk})^2\Big) = 2\Big(\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2 - \sum_{i=1}^{mn}\lambda_i^2\Big). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

即 1) 成立，同理可知 2),也成立。

定理 5 (判定条件 II) 若

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \le \sum_{i=1}^{m} \tau_i^2,$$

则 $E\|\hat{\Gamma}_c - \Gamma_c\|_F^2 \le E\|\hat{\Gamma}_r - \Gamma_r\|_F^2$。反之亦然。

证明 由定理3，$\hat{\Gamma}_c$ 与 $\hat{\Gamma}_r$ 的均方误差的差为

$$
\begin{aligned}
E\|\hat{\Gamma}_c-\Gamma_c\|_F^2-E\|\hat{\Gamma}_r-\Gamma_r\|_F^2 &= \frac{-N^4+3N^3-N^2-N+1}{N^5}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk}-\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}\right)\\
&\quad+\frac{(N-1)(N^3+2N^2-8N+6)}{N^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{ii}^{lk}\sigma_{jj}^{lk}-\sigma_{ij}^{ll}\sigma_{ij}^{kk}\right)\\
&= \frac{(N-2)(N^4+2N^2-5N+3)}{N^6}\Big(\sum_{i=1}^{n}t_i^2-\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2\Big).
\end{aligned}
$$

4 实例

在BernDBS人脸库和JAFFE人脸表情库中进行人脸图像识别实验来验证上述分析。BernDBS人脸库由30人组成，每人10幅，含有一定程度的人脸姿态、表情和饰物的变化，每幅图像为 128×128 的矩阵。每人随机取2幅共60幅用于训练，余下用于测试。JAFFE人脸表情库由10名日本女性组成，含有生气、厌恶、害怕、高兴、中性、悲伤和惊奇7种表情，每人每种表情若干幅，共213幅表情图像。手工标定两眼中心位置，并进行校正和裁剪，将表情图像处理成 128×128 的图像矩阵，每人每种表情取1幅共70幅作为训练样本，余下的143幅作为测试样本。每个库上的实验都进行10轮，取10轮结果的平均作为最后的结果。

分别采用PCA和2DPCA进行人脸图像识别，采用最近邻分类器进行分类，PCA采用2-范数作为距离度量，2DPCA采用Frobenius范数作为距离度量。在实施PCA与2DPCA时，所取投影向量的个数 k 由投影特征值比例来确定，即 k 可用下式来确定

$$k=\arg\min_k\Big\{\sum_{i=1}^{k}d_i/d\geq c\Big\}, \tag{25}$$

其中 d_i 可以是 $\hat{\lambda}_i$，$\hat{\tau}_i$ 或 $\hat{t}_i$，d 为 $\hat{\Sigma}$ 的特征值之和，其实也是 $\hat{\Gamma}_c$ 和 $\hat{\Gamma}_r$ 的特征值之和，$c\in[0,1]$。表1给出了PCA样本协方差阵与2DPCA样本协方差阵的特征值平方和，图1与图2分别给出了BernDBS库与JAFFE库的实验结果。对照表1与图1，2可见，实验结果与定理4、定理5的结论相符。

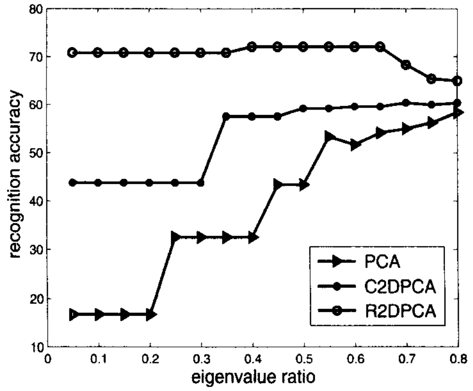

图1: BernDBS库中PCA与2DPCA的比较

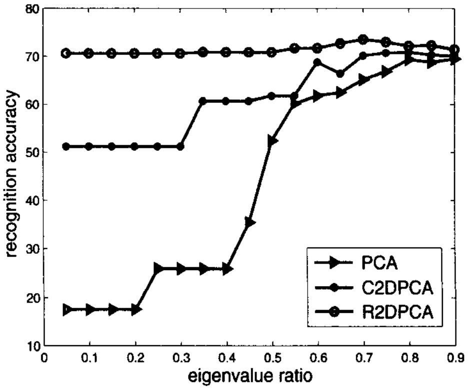

图2: JAFFE库中PCA与2DPCA的比较

表1: PCA与2DPCA的样本协方差阵特征值平方和的比较

特征值平方和	PCA	C2DPCA	R2DPCA
BernDBS库	$\sum_{i=1}^{16384}\hat{\lambda}_i^2 = 5.9666\times10^{14}$	$\sum_{i=1}^{128}\hat{\tau}_i^2 = 8.7427\times10^{14}$	$\sum_{i=1}^{128}\hat{t}_i^2 = 1.2945\times10^{15}$
JAFFE库	$\sum_{i=1}^{16384}\hat{\lambda}_i^2 = 6.9073\times10^{13}$	$\sum_{i=1}^{128}\hat{\tau}_i^2 = 1.0189\times10^{14}$	$\sum_{i=1}^{128}\hat{t}_i^2 = 1.1340\times10^{14}$

5　结束语

定理4给出了2DPCA在图像特征提取中优于PCA的判定条件，是一个充分条件；定理5给出了C2DPCA与R2DPCA在图像特征提取中孰优孰劣的判定条件，是一个充要条件；所有这些条件都只依赖于各自协方差阵的特征值平方和的大小。

参考文献：

[1] Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space[J]. Philosophical Magazine, 1901, 10: 339-348

[2] Sirovich L, Kirby M. Low-dimensional procedure for characterization of human faces[J]. J Optical Soc Am, 1987, 4: 519-524

[3] Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition[J]. Cognitive Neuroscience, 1991, 3(1): 71-86

[4] Yang J, Zhang D, Frangi A F, *et al.* Two-Dimensional PCA: A new approach to appearance-based face representation and recognition[J]. IEEE Transactions on PAMI, 2004, 26(1): 131-137

[5] 张尧庭，方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京：科学出版社，1999

[6] 王松桂. 主成分的最优性与广义主成分估计类[J]. 应用概率统计，1985, 1(1): 23-30

[7] 王松桂. 线性模型的理论与应用[M]. 合肥：安徽教育出版社，1986

Criteria for 2DPCA Superior to PCA in Image Feature Extraction

CHENG Zheng-dong[1,2], ZHANG Yu-jin[1], FAN Xiang[2,3]

(1- Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084;
2- Hefei Electronic Engineering Institute, Hefei 230037;
3- Six Department, Science and Technology University of China, Hefei 230027)

Abstract: PCA and 2DPCA are two typical image feature extraction methods. The wellness of image features extracted by PCA and 2DPCA can be judged by their reconstruction errors. Our analysis shows that the reconstruction errors of PCA and 2DPCA are equal in theory, but depend on the estimation accuracy of their covariance matrices in practice. This paper gives the accuracy expressions for estimations of covariance matrices for PCA and 2DPCA, respectively, based on the criterion of mean square error. Further, it is shown that the criterion for 2DPCA to be superior to PCA is that the square sum of eigenvalues of the covariance matrix of 2DPCA is larger than that of PCA. This paper also points out that the same criterion can be used to judge the superiority between the column 2DPCA and row 2DPCA. Experiments on the face database and facial expression database verify the correctness of the decision conditions.

Keywords: PCA; 2DPCA; image feature; covariance matrix; reconstruction error; mean square error